SESION 1

1. EXPONENTES Y LOGARITMOS

1.1. Exponentes
1.2. Importancia de los exponentes

Funciones exponenciales

$20{,}000 = (10{,}000)2^1$ $40{,}000 = (10{,}000)2^2$ $80{,}000 = (10{,}000)2^3$

Usamos $b > 0$ para evitar las raíces de números negativos, como en el caso de $(-4)^{1/2} = \sqrt{-4}$.

Imagine usted que un cultivo de bacterias crece con tal rapidez que, a cada hora, el número de bacterias se duplica. En estas condiciones, sí había 10,000 bacterias cuando el cultivo empezó a crecer, el número habría aumentado a 20,000 después de una hora, habría 40,000 después de 2 horas y así, sucesivamente. Se vuelve razonable decir que

$$y = f(x) = (10{,}000)2^x$$

nos da el número de bacterias presentes después de x horas. Esta ecuación define una *función exponencial* con la variable independiente x y la variable dependiente (o función) y.

Una función como $f(x) = b^x$, que tiene a la variable como exponente, se conoce con el nombre de **función exponencial**. Estudiaremos este tipo de funciones con la suposición de que la base numérica $b > 0$. Por ejemplo, tomemos en consideración la función $y = f(x) = 2^x$ con su gráfica. Observe lo siguiente:

1. La función se define para todos los valores reales de x. Cuando x es negativa, podemos aplicar la definición de los exponentes negativos. Así, para $x = -2$,

$$2^x = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

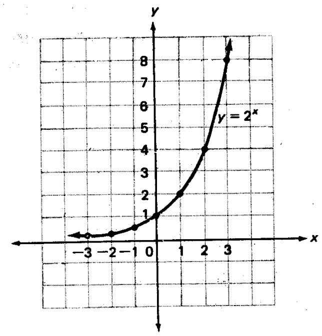
El dominio de la función es el conjunto de los números reales.

2. Para todos los reemplazos, de x, la función adquiere un valor positivo. O sea, 2^x no puede representar jamás un número negativo y tampoco es posible que 2^x se haga igual a cero. El rango de la función es el conjunto de los números reales positivos.

3. Por último, como ayuda para elaborar la gráfica, se pueden localizar unos cuantos pares ordenados de números específicos.

La función creciente y la curva resulta cóncava hacia arriba. El eje de las x es una asíntota horizontal, extendida hacia la izquierda.

x	$y = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

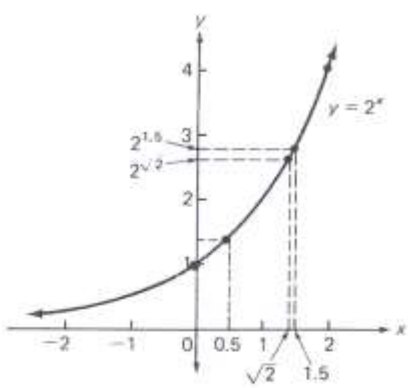


Si se desea, la exactitud de esta gráfica se puede mejorar usando más puntos. Por ejemplo, tomamos en cuenta valores racionales de *x*, como $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$:

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.4$$
$$2^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^3 = 2.7$$

> *Se da el valor correcto de $\sqrt{2}$ con aproximación hasta décimos, tomando de la tabla I del apéndice.*

Usar valores irracionales para *x* como $\sqrt{2}$ o π,constituye una cuestión completamente diferente. (Recuerde usted que nuestro desarrollo de los exponentes se detuvo en los racionales.) Dar un significado preciso a uno de estos números queda fuera del alcance de este curso. Resulta, empero, que la forma indicada de la curva correspondiente a $y = 2^x$ es correcta y puede lograr que "se acomoden" en la curva las definiciones formales de ciertos valores, como $2^{\sqrt{2}}$.



Se puede usar una calculadora para entender mejor los números como $2^{\sqrt{2}}$. Por ejemplo, verifique usted estas potencias de 2, con aproximación hasta diezmilésimos.

$$2^{1.4} = 2.6390$$
$$2^{1.41} = 2.6574$$
$$2^{1.414} = 2.6647$$
$$2^{1.4142} = 2.6651$$

Dado que los exponentes con decimales están acercándose cada vez más al número irracional $\sqrt{2}$, las potencias correspondientes se aproximan a $2^{\sqrt{2}}$. Así, las aproximaciones exponenciales sugieren que $2^{\sqrt{2}} = 2.67$, con la aproximación hasta centésimos. Ahora, encuentre usted directamente $2^{\sqrt{2}}$ con una calculadora y compare los resultados.

En estudios más avanzados se puede demostrar que, para cualquier base positiva *a* y *b*. se cumplen las siguientes reglas de los exponentes, representados por números reales cualesquiera, *r* y *s*.

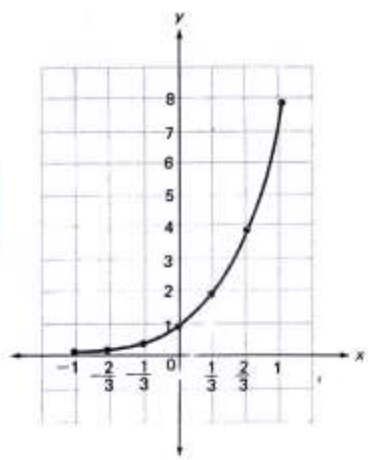
$b^r b^s = b^{r+s}$	$\dfrac{b^r}{b^s} = b^{r-s}$	$\left(b^r\right)^s = b^{rs}$
$a^r b^r = (ab)^r$	$b^0 = 1$	$b^{-r} = \dfrac{1}{b^r}$

Nuestro trabajo previo con estas mismas reglas, para exponentes racionales, puede servir de base ahora para aceptar estos resultados.

EJEMPLO 1 Elabore la gráfica de la curva correspondiente a $y = 8^x$ en el intervalo [-1, 1], usando una tabla de valores.

Solución

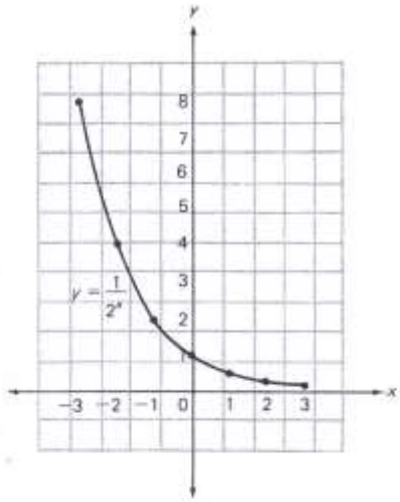
x	y
-1	$\frac{1}{8}$
$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
0	1
$\frac{1}{3}$	2
$\frac{2}{3}$	4
1	8



Hasta aquí hemos restringido nuestra atención a las funciones exponenciales de la forma $y = f(x) = b^x$, donde $b > 1$. Todas estas gráficas tienen la misma forma de la función $y = 2^x$. Para $b = 1$, $y = b^x = 1^x = 1$ para todo valor de x. Como en este caso se trata de una función constante. $f(x) = 1$, no usamos la base $b = 1$ en la clasificación de las funciones exponenciales.

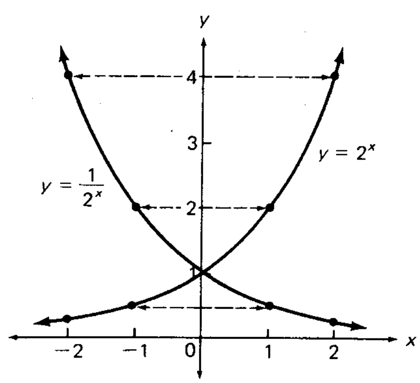
Ahora, exploremos las funciones exponenciales $y = f(x) = b^x$ para las cuales tenemos: $0 < b < 1$. En particular, si $b = \dfrac{1}{2}$, tenemos: $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x}$; o sea: $y = 2^{-x}$.

x	$y = 2^{-x}$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



> *Todas las curvas correspondientes a $y = b^x$, para $0 < b < 1$, tienen la misma forma básica. La curva es cóncava hacia arriba, la función resulta decreciente y la recta definida por $y = O$ es una asíntota horizontal que se extiende hacia la derecha.*

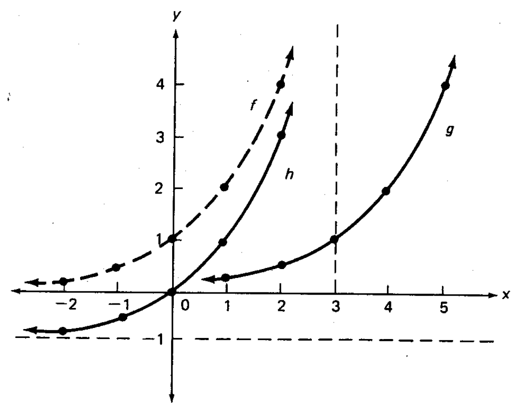
También es posible elaborar la gráfica de $y = g(x) = \dfrac{1}{2^x}$ relacionándola con la gráfica de $y = f(x) = 2^x$. Como $g(x) = \dfrac{1}{2^x} = 2^{-x} = f(-x)$, los valores de y para la función g son los mismos valores de y correspondientes a f, *pero en el lado opuesto del eje de las y*. En otras palabras, la gráfica de g es el *reflejo* de la gráfica de f, respecto del eje de las y.



EJEMPLO 2 Use la gráfica de $y = f(x) = 2^x$ para trazar las curvas definidas por

$$y = g(x) = 2^{x-3} \quad \text{e} \quad y = h(x) = 2^x - 1$$

Solución Como $g(x) = f(x - 3)$, es posible obtener la gráfica de g desplazando la gráfica de $y = 2^x$ tres unidades hacia la derecha. Además, dado que $h(x) = f(x) - 1$, la gráfica de h se puede elaborar desplazando la de $y = 2^x$ una unidad abajo.



La gráfica de g se obtiene mediante la ***traslación*** *de la gráfica de f tres unidades hacia la derecha. La gráfica h se encuentra trasladando la de f una unidad hacia abajo.*

Hemos analizado funciones de la forma $y = f(x) = b^x$ para valores específicos de b. En cada caso, es preciso que usted advierta que las gráficas pasan por el punto (0, 1), ya que $y = b^0 = 1$. Por otra parte, cada una de esas gráficas tiene el eje de las x como asíntota unilateral y no hay ninguna abscisa al origen. A continuación, se resumen éstas y otras propiedades de $y = f(x) = b^x$, para $b > 0$ y $b \neq 1$.

PROPIEDADES DE $y = f(x) = b^x$

1. El dominio consiste en todos los números reales x.
2. El rango consta de todos los números positivos y.
3. La función es creciente (la curva asciende) cuando $b > 1$, y decreciente (la curva desciende) cuando $0 < b < 1$.
4. La curva es cóncava arriba para $b > 1$ y para $0 < b < 1$.
5. Es una función biunívoca.
6. El punto (0, 1) está en la curva. No hay abscisas al origen.
7. El eje de las x es una asíntota horizontal de la curva hacia la izquierda, para $b > 1$, y hacia la derecha para $0 < b < 1$.
8. $b^{x1}b^{x2} = b^{x1+x2}$; $b^{x1}/b^{x2} = b^{x1-x2}$; $(b^{x1})^{x2} = b^{x1x2}$.

Algunas veces es posible aplicar esta forma de la propiedad de las funciones biunívocas para resolver ecuaciones.

La propiedad de las funciones biunívocas se pueden expresar de esta manera:

Si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces: $x_1 = x_2$.

Es decir: como $f(x_1)$ y $f(x_2)$ representan el mismo valor del rango sólo puede haber un valor correspondiente en el dominio; en consecuencia, $x_1 = x_2$ .Usando $f(x) = b^x$ esta aseveración significa lo siguiente:

Si $b^{x1} = b^{x2}$, entonces: $x_1 = x_2$.

Esta propiedad se puede aprovechar para resolver ciertas **funciones exponenciales**, como $5^{x^2} = 625$. Primero, observamos que 625 se puede expresar como 5^4.

$$5^{x^2} = 625$$
$$5^{x^2} = 5^4$$

Gracias a que la función $f(t) = 5^t$ es biunívoca, podemos igualar los exponentes y resolver la ecuación para x.

$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2 \quad (x = 2 \quad \text{o también: } x = -2)$$

Para verificar estas soluciones, advertiremos que $5^{2^2} = 5^4 = 625$ y también $5^{(-2)^2} = 5^4 = 625$.

> *ADVERTENCIA:* a^{b^c} *significa* $a^{\left(b^c\right)}$, *en tanto que* $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$. *Por lo tanto, en general,* $a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)} \neq \left(a^b\right)^c$.

Los siguientes ejemplos ilustran más el aprovechamiento de que estas funciones sean biunívocas para resolver ecuaciones exponenciales.

EJEMPLO 3 Resuelva para x: $\dfrac{1}{3^{x-1}} = 81$

Solución Escribimos 81 como 3^4 y $\dfrac{1}{3^{x-1}}$ como $3^{-(x-1)}$

$$3^{-(x-1)} = 3^4$$
$$-(x-1) = 4 \qquad (\text{Propiedad de la función biunívoca})$$
$$-x+1 = 4$$
$$-x = 3$$
$$x = -3$$

Verifique usted este resultado en la ecuación original.

EJEMPLO 4 Resuelva para $x : b^{x^2-x} = 1$

Solución Observamos que 1 se puede escribir en la forma b^0. De esta manera, tenemos

$$b^{x^2-x} = b^0$$
$$x^2 - x = 0 \qquad \left(Si\ b^{x_1} = b^{x_2}, entonces : x_1 = x_2\right)$$
$$x(x-1) = 0$$
$$x = 0 \qquad o\ bien : \quad x = 1$$

Verifique usted ambos resultados en la ecuación original.

VERIFIQUE SU COMPRENSION

Resuelva para x.

1. $2^{x-1}=32$ **2.** $2^{x2}=16$ **3.** $8^{2x+1}=64$

4. $\frac{1}{2^x}=64$ **5.** $\frac{1}{5^{x+1}}=125$ **6.** $\frac{1}{4^{x-2}}=64$

7. $27^x=3$ **8.** $27^x=9$ **9.** $125^x=25$

10. $\left(\frac{1}{4}\right)^x=32$ **11.** $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{27}{125}$ **12.** $\left(\frac{9}{25}\right)^x=\frac{5}{3}$

EJERCICIOS 1

Elabore la gráfica de la función exponencial f utilizando una breve tabla de valores. Luego, aproveche esta curva para utilizar la gráfica de g. Indique las asíntotas horizontales.

1. $f(x)=2^x$; $g(x)=2^{x+3}$ **2.** $f(x)=3$; $g(x)=3^x-2$ **3.** $f(x)=4^x$; $g(x)=-(4^x)$

4. $f(x)=5^x$ **;** $g(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ **5.** $f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^x$; $g(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$ **6.** $f(x)=8^x$**;** $g(x)=8^{x-2}+3$

7. $f(x)=3^x$ **;** $g(x)=2(3^x)$ **8.** $f(x)=3^x$; $g(x)=\frac{1}{2}(3^x)$ **9.** $f(x)=2^{\frac{x}{2}}$**;** $g(x)=2^{\frac{x}{2}}-3$

10. $f(x)=4^x$ $g(x)=4^{1-x}$

Trace las curvas de cada ejercicio en los mismos ejes coordenados.

11. $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$**,** $y=2^x$**,** $y=\left(\frac{5}{2}\right)^x$ **12.** $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$**,** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$**,** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ **13.** $y=2^{|x|}$**,** $y=-(2^{|x|})$

14. $y=2^x$**,** $y=2^{-x}$**,** $y=2^x-2^{-x}$ (Sugerencia: Reste las ordenadas).

Aplique la propiedad de que una función exponencial es biunívoca para resolver con la función adecuada cada una de las ecuaciones indicadas.

15. $2^x=64$ **16.** $3^x=81$ **17.** $2^{x2}=512$ **18.** $3^{x-1}=27$ **19.** $5^{2x+1}=125$

20. $2^{x3}=256$ **21.** $7^{x2+x}=49$ **22.** $b^{x2+x}=1$ **23.** $\frac{1}{2^x}=32$ **24.** $\frac{1}{10^x}=10{,}000$

25. $9^x = 3$ **26.** $64^x = 8$ **27.** $9^x = 27$ **28.** $64^x = 16$ **29.** $\left(\frac{1}{49}\right)^x = 7$

30. $5^x = \frac{1}{125}$ **31.** $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{9}{4}$ **32.** $(0.01)^x = 1000$

33. En el mismo sistema de ejes coordenados, elabore las gráficas de las funciones $y = 2^x$ e $y = x^2$, para el intervalo [0, 5]. (Utilice una unidad de medida más grande en el eje de las x que en el eje de las y.) ¿Cuáles son los puntos de intersección?

34. Use una calculadora para verificar que $\sqrt{3} = 1.732050\ldots$. Luego, anote en la tabla las potencias de 2, redondeando cada anotación con una aproximación hasta de cuatro cifras decimales (hasta diezmilésimos).

X		1.7	1.73	1.732	1.7320	1.73205
2^x						

Con base en los resultados anteriores. ¿cuál es su aproximación para $2^{\sqrt{3}}$ hasta milésimos? Ahora encuentre directamente el valor de $2^{\sqrt{3}}$ en la calculadora y compare ambos resultados.

35. Aplique las instrucciones del Ejercicio 34 con estos números:

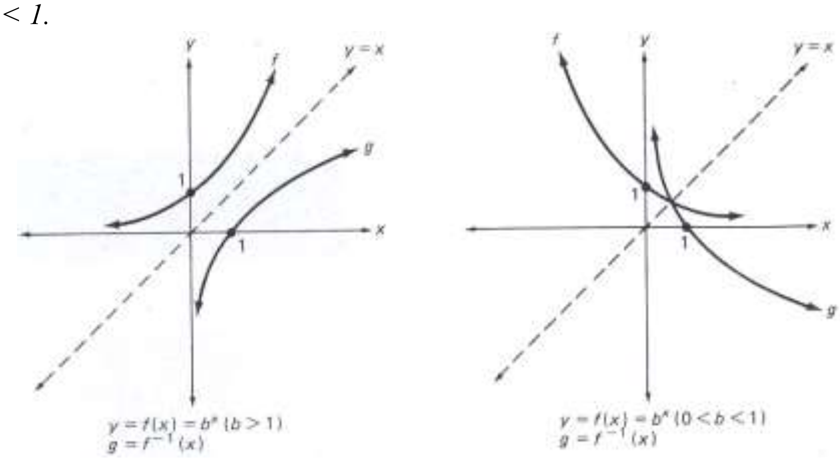
(a) $3^{\sqrt{2}}$ **(b)** $3^{\sqrt{3}}$ **(c)** $2^{\sqrt{5}}$ **(d)** 4π

***36.** Resuelva para x $\left(6^{2x}\right)\left(4^x\right) = 1728$.

37. Resuelva para x $\left(5^{2x+1}\right)\left(7^{2x}\right) = 175$.

2. Funciones logarítmicas

En la sección anterior, se hizo hincapié en que $y = f(x) = b^x$, para b > 0 y para b ≠ l. es una función biunívoca. Como cada función biunívoca tiene una inversa, se deduce que f tiene una inversa. La gráfica de g, la función inversa, es el reflejo de $y = f(x)$ al otro lado de la recta definida por $y = x$. He aquí dos casos típicos, para $b > 1$ y para $0 < b < 1$.



Recuerde usted que, $f^{-1}(x)$ *es la notación usada para representar a la inversa de la función f.*

La ecuación correspondiente a g, la función inversa, se puede obtener intercambiando el papel que desempeñan las variables, de la manera siguiente:

$$\text{Función } f\text{: } y = f(x) = b^x$$
$$\text{Función inversa } g\text{: } x = g(y) = b^y$$

Por lo tanto, $x = b^y$ es la ecuación correspondiente a g. Infortunadamente, no contamos con ningún método para resolver $x = b^y$ y expresar el valor de y explícitamente, en función de x. Para vencer esta dificultad, se ha ideado una nueva terminología.

La ecuación $x = b^y$ nos dice que *y es el exponente de la base b que produce x*. En situaciones como ésta, se usa la palabra **logaritmo** en lugar de *exponente*. Entonces, un logaritmo es un exponente. Ahora, podemos decir que *y es el logaritmo de base b que produce x*. Esta definición se puede abreviar así: $y = \text{logaritmo}_b\, x$, y se abrevia más todavía para llegar a la forma definitiva:

$$\boldsymbol{y = \log_b x}$$

Nota: $y = b^x$ *e* $y = \log_b x$ *son funciones inversas.*

que se lee así: "y es el log de x en la base b" o "y es el log de base b de x".

Es importante advertir que sólo estamos definiendo (no demostrando) que la ecuación $y = \log_b x$ tiene el mismo significado que $x = b^y$. En otras palabras, estas dos formas son equivalentes:

$$\text{Forma exponencial: } x = b^y$$
$$\text{Forma logarítmica: } y = \log_b x$$

Y, como son equivalentes, definen las misma función g:

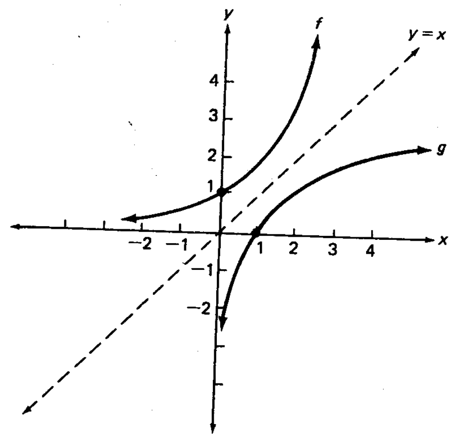
$$y = g(x) = \log_b x$$

Y ya sabemos que $y = f(x) = b^x$ e $y = g(x) = \log_b x$ son funciones inversas. En consecuencia, tenemos lo siguiente:

$$f(g(x)) = f(\log_b x) = b^{\log_b x} = x \qquad \text{y} \qquad g(f(x)) = (b^x) = \log_b(b^x) = x$$

EJEMPLO 1 Escriba la ecuación de g, la función inversa de $y = f(x) = 2^x$ y elabore las gráficas de ambas en los mismos ejes coordenados.

Solución La inversa g tiene la ecuación $y = f(x) = 2^x$, y su gráfica se puede obtener reflejando $y = f(x) = 2^x$ al otro lado de la recta definida por $y = x$.



VERIFIQUE SU COMPRENSION

1. Encuentre la ecuación de la inversa de y = 3^x elabore la gráfica de ambas funciones en los mismos ejes.

2. Encuentre la ecuación de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ y elabore la gráfica de las funciones en los mismos ejes.

Sea y = f(x) = $log_5 x$, Describa usted como se puede obtener la gráfica de cada una de las siguientes funciones, a partir de la gráfica de f

3. $g(x) = \log_5(x+2)$ **4.** $g(x) = 2 + \log_5 x$

5. $g(x) = -\log_5 x$ **6.** $g(x) = 2\log_5 x$

Encontramos $y = log_b x$ intercambiando el papel que desempeñan las variables de $y = b_x$.. Como consecuencia de este intercambio, también se intercambian los dos dominios y rangos de las dos funciones. Por consiguiente,

El dominio de es igual al rango de $y = b^x$.
El rango de $y = log_b x$ es igual al dominio de $y = b^x$.

Estos resultados se incorporan a la siguiente lista de propiedades importantes de la función $y = log_b x$, donde $b > 0$ *y* $b \neq 1$.

PROPIEDADES DE $y = f(x) = log_b\, x$

1. El dominio consiste en todos los números x positivos.
2. El rango consta de todos los números reales y.
3. La función crece (la curva asciende) para $b > 1$ y decrece (la curva desciende) para $0 < b < 1$.
4. La curva es cóncava hacia abajo para $b > 1$ y cóncava hacia arriba para $0 < b < l$.
5. Es una función biunívoca; si $log_b(x_1) = log_b\,(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$
6. El punto (1, 0) está en la gráfica. No hay ordenada al origen.
7. El eje de las y es la asíntota vertical de la curva, en sentido descendente, para $b > 1$, en sentido ascendente para $0 < b < 1$.
8. $\log_b\left(b^x\right) = x$ y $b^{\log_b x} = x$.

EJEMPLO 2 Encuentre el dominio de $y = log_2 (x - 3)$.

Solución En $y = log_2 (x - 3$, la expresión $x - 3$ desempeña el mismo papel de la x en log_2x. Por lo tanto, $x - 3 > 0$, y el dominio consiste en cada $x > 3$.

> ***ADVERTENCIA***: *No confunda usted* $x = b^y$ *con su inversa* $y = b^x$. *Estas dos formas no son equivalentes.*

La siguiente tabla suministra varios ejemplos específicos de la equivalencia entre estas dos formas. En cada caso, la expresión en la forma logarítmica. a la izquierda, es equivalente a la que aparece en la columna de la derecha.

Forma logarítmica $log_b x = y$	*Forma exponencial* $b^y = x$
$\text{Log}_5 25 = 2$	$5^2 = 25$
$\text{Log}_{27} 9 = 2/3$	$27^{2/3} = 9$
$\text{Log}_6 1/36 = -2$	$6^{-2} = 1/36$
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$

De las formas, $y = log_bx$ y $x = b^y$, generalmente es más fácil trabajar con la exponencial. En consecuencia, cuando surge un problema concerniente a $y = log_bx$, con frecuencia es conveniente convertir la expresión en la forma exponencial. Por ejemplo, para calcular el valor de $\log_9 27$, escribimos

$$y = log_9 27$$

Luego, convertimos $y = log_9 27$ en la forma exponencial. Así:

$$9^y = 27$$

Para resolver esta ecuación exponencial, volvemos a escribir cada lado usando la misma base. Es decir: como $27 = 3^3$ y $9^y = (3^2)^y = 3^{2y}$, tenemos

$$3^{2y} = 3^3$$
$$2y = 3 \qquad (f(\text{t}) = 3^t \text{ es una función biunívoca})$$
$$y = 3/2$$

EJEMPLO 3 Resuelva para b: $\log_b 8 = 3/4$

Solución La convertimos en la forma exponencial.

$$b^{3/4} = 8$$

Elevamos la potencia 3/4 de ambos lados.

$$(b^{3/4})^{4/3} = 8^{4/3}$$

$8^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^4 = 2^4$ $\quad\quad$ $b = 16$

EJERCICIOS 2

Elabore la gráfica de la función f . Refleje esta curva al otro lado de la recta definida por y = x para obtener la gráfica de g, la función inversa, y escriba la ecuación de g.

l. $y = f(x) = 4^x$ **2.** $y = f(x) = 5^x$ **3.** $y = f(x) = (1/3)^x$ **4.** $y = f(x) = (0.2)^x$

Describa cómo se puede obtener la gráfica de h a partir de la gráfica de g. Encuentre el dominio de h y escriba la ecuación de la asíntota vertical.

5. $g(x) = \log_3 x$; $h(x) = \log_3 (x + 2)$ **6.** $g(x) = \log_5 x$; $h(x) = \log_5 (x - l)$

7. $g(x) = \log_8 x$; $h(x) = 2 + \log_8 x$ **8.** $g(x) = \log_{10} x$; $h(x) = 2 \log_{10} x$

Elabore la gráfica de f y señale su dominio.

9. $f(x) = \log_{10} x$ **10.** $f(x) = -\log_{10} x$ **11.** $f(x) = |\log_{10} x|$

12. $f(x) = \log_{10} (-x)$ **13.** $f(x) = \log_{10} |x|$ **14.** $f(x) = \log_{1/10} (x + 1)$

Convierta cada expresión exponencial en forma logarítmica.

15. $2^8 = 256$ **16.** $5^{-3} = 1/125$ **17.** $(1/3)^{-1} = 3$

18. $81^{3/4} = 27$ **19.** $17^0 = 1$ **20.** $(1/49)^{-1/2} = 7$

Convierta cada expresión logarítmica en forma exponencial.

21. $\log_{10} 0.0001 = -4$ **22.** $\log_{64} 4 = 1/3$ **23.** $\log_{\sqrt{2}} 2 = 2$

24. $\log_{13} 13 = 1$ **25.** $\log_{12} 1/1728 = -3$ **26.** $\log_{27/8} 9/4 = 2/3$

Resuelva para la cantidad indicada: *y, x* o *b*.

27. $\log_2 16 = y$ **28.** $\log_{1/2} 36 = y$ **29.** $\log_{1/3} 27 = y$ **30.** $\log_7 x = -2$ **31.** $\log_{1/6} x = 3$

32. $\log_8 x = y$ **33.** $\log_b 125 = 3$ **34.** $\log_b 8 = 3/2$ **35.** $\log_b 1/8 = -3/2$ **36.** $\log_{100} 10 = y$

37. $\log_{27} 3 = y$ **38.** $\log_{1/16} x = 1/4$ **39.** $\log_b 16/81 = 4$ **40.** $\log_8 x = -3$ **41.** $\log_b 1/27 = -3/2$

42. $\log_{\sqrt{3}} x = 2$ **43.** $\log_{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{8}\right) = y$ **44.** $\log_b 1/128 = -7$ **45.** $\log_{0.001} 10 = y$ **46.** $\log_{0.2} 5 = y$

47. $\log_9 x = 1$

Calcule el valor de cada expresión

48. $\log_2 (\log_4 256)$ **49.** $\log_{3/4} (\log_{1/27} \frac{1}{81})$

Intercambiando el papel que desempeñan las variables, encuentre la función inversa g. Demuestre que (f o *g)(x) = x y (g* o *f)(x) = x.*

***50.** $y = f(x) = 2^{x+1}$ ***51.** $y = f(x) = \log_3 (x + 3)$

3. Leyes de los logaritmos

Para las leyes de los exponentes, tenemos

$$2^3 \bullet 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

Ahora, concentrémonos nada más en la parte exponencial:

$$3 + 4 = 7$$

Los tres exponentes incluidos aquí se pueden expresar como logaritmos.

$3 = \log_2 8$ porque $2^3 = 8$
$4 = \log_2 16$ porque $2^4 = 16$
$7 = \log_2 128$ porque $2^7 = 128$

Sustituir estas expresiones en 3 + 4 = 7, nos da:

$$\log_2 8 + 10g_2\ 16 = \log_2 128$$

Además, como $128 = 8 \bullet 16$, tenemos

$$\log_2 8 + \log_2 16 = \log_2 (8 \bullet 16)$$

Este es un caso especial de la primera ley de los logaritmos:

LEYES DE LOS LOGARITMOS

Si M y N son positivos, b > 0 y b ≠ 1, entonces:

LEY 1. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

LEY 2. $\log_b M/N = \log_b M - \log_b N$

LEY 3. $\log_b (M^K) = k \log_b N$

LEY 4. $\log_A N = \log_b N / \log_b a$

La ley 1 dice que el logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. ¿Puede usted dar interpretaciones semejantes de las leyes 2 y 3?

Como los logaritmos son exponentes, no es de asombramos que estas leyes se puedan demostrar usando las reglas adecuadas de los exponentes. A continuación, aparece una demostración de la ley 1; las demostraciones de las leyes 2 y 3 se dejan como ejercicios.

Sean:

$$\log_b M = r \qquad \text{y} \qquad \log_b N = s$$

Convertimos en la forma exponencial:

Recuerde: si $\log_b x = y$, entonces: $b^y = x$.

$$M = b^r \qquad \text{y} \qquad N = b^s$$

Multiplicamos las dos ecuaciones:

$$MN = b^r b^s = b^{r+s}$$

Luego, convertimos esta expresión en la forma logarítmica:

$$\log_b MN = r + s$$

Sustituimos r y s por sus equivalentes para obtener el resultado final:

$$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$$

EJEMPLO 1 Para los números positivos A, B y C, demuestre que

$$\log_b \frac{AB^2}{C} = \log_b A + 2\log_b B - \log_b C$$

Solución

$$\begin{aligned} \log_b \frac{AB^2}{C} &= \log_b \left(AB^2\right) - \log_b C && \text{(Ley 2)} \\ &= \log_b A + \log_b B^2 - \log_b C && \text{(Ley 1)} \\ &= \log_b A + 2\log_b B - \log_b C && \text{(Ley 3)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Escriba 1/2 $\log_b x - 3\log_b (x - 1)$ como el logaritmo de una sola expresión en x.

Identifique usted las leyes de los logaritmos que se aplican en los Ejemplos 2 y 3.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\log_b x - 3\log_b (x-1) &= \log_b x^{\frac{1}{2}} - \log_b (x-1)^3 \\ &= \log_b \frac{x^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^3} \\ &= \log_b \frac{\sqrt{x}}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Dados: $\log_b 2 = 0.6931$ y $\log_b 3 = 1.0986$, encuentre usted: $\log_b \sqrt{12}$.

Solución

$$\begin{aligned} \log_b \sqrt{12} &= \log_b 12^{1/2} = \frac{1}{2}\log_b 12 \\ &= \frac{1}{2}\log_b (3 \cdot 4) = \frac{1}{2}\left[\log_b 3 + \log_b 4\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\log_b 3 + \log_b 2^2\right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}[\log_b 3 + 2\log_b 2]$$
$$= \frac{1}{2}[\log_b 3 + \log_b 2]$$
$$= \frac{1}{2}(1.0986) + 0.6931$$
$$= 1.2424$$

> *Este ejemplo indica que, para cierto número b, que sirve de base, $b^{0.0231} = 2$, b1.0986 = 3 y b1.2424 = $\sqrt{12}$.*

VERIFIQUE SU COMPRENSION

Convierta los logaritmos dados en expresiones que incluyan $\log_b A$. $\log_b B$ y $\log_b C$.

1. $\log_b ABC$ **2.** $\log_b \frac{A}{BC}$ **3.** $\log_b \frac{(AB)^2}{C}$

4. $\log_b AB^2C^3$ **5.** $\log_b \frac{A\sqrt{B}}{C}$ **6.** $\log_b \frac{\sqrt[3]{A}}{(BC)^3}$

Transforme cada expresión en el logaritmo de una sola expresión en x.

7. $\log_b x + \log_b x + \log_b 3$ **8.** $2\log_b(x-1) + \frac{1}{2}\log_b x$

9. $\log_b (2x - 1) - 3 \log_b (x^2 + 1)$
10. $\log_b x - \log_b (x - 1) - 2 \log_b (x - 2)$

Use la información dada en el Ejemplo 3 para encontrar estos logaritmos.

11. $\log_b 18$ **12.** $\log_b \frac{16}{27}$

EJEMPLO 4 Resuelva para x: $\log_8 (x - 6) + \log_8 (x + 6) = 2$.

Solución Primero, observamos que en $\log_8 (x + 6)$ debemos tener $x - 6 > 0$; o sea: $x > 6$. De manera parecida, $(x + 6)$ exige que tengamos $x > -6$. Por consiguiente, las únicas soluciones, si las hay, deben satisfacer la condición: $x > 6$.

$$\text{Log}_8 (x - 6) + \log_8 (x + 6) = 2$$
$$\text{Log}_8 (x - 6)(x + 6) = 2 \qquad \textbf{(Ley 1)}$$
$$\text{Log}_8 (x^2 - 36) = 2$$
$$x^2 - 36 = 8^2 \qquad \textbf{(convertimos en la forma exponencial)}$$
$$x^2 - 100 = 0$$
$$(x + 10)(x - 10) = 0$$
$$x = -10 \quad \text{o bien:} \quad x = 10$$

> ***¡ADVERTENCIA!***
> $log_8 (x^2 - 36) \neq log_8 x^2 - log^8 36$

Las únicas soluciones posibles son -10 y 10. Nuestra observación inicial de que $x > 6$ elimina automáticamente al -10. (Si no se hubiera hecho esa observación inicial, el -10 se habría eliminado de todos modos, al verificar en la ecuación dada). El valor $x = 10$ se puede verificar de la manera siguiente:

$$\log_8 (10 - 6) + \log_8 (10 + 6) = \log_8 4 + \log_8 16$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

EJEMPLO 5 Resuelva para x: $\log_{10} (x^3 - 1) - \log_{10} (x^2 + x + 1) = 1$.

Solución

$$\log_{10}(x^3 - 1) - \log_{10}(x^2 + x + 1) = 1$$
$$\log_{10} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} = 1 \qquad \textbf{(Ley 2)}$$
$$\log_{10} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = 1 \qquad \textbf{(factorizando)}$$
$$\log_{10}(x - 1) = 1$$
$$x - 1 = 10^1 \qquad \textbf{(¿Por qué?)}$$
$$x = 11$$

Verificación:

$$\log_{10} (11^3 - 1) - \log_{10} (11^2 + 11 + 1) = \log_{10} 1330 - \log_{10} 133$$
$$= \log_{10} \frac{1330}{133}$$
$$= \log_{10} 10 = 1$$

EJEMPLO 6 Resuelva para x: $\log_3 2x - \log_3 (x + 5) = 0$.

Solución

$$\log_3 2x - \log_3 (x + 5) = 0$$
$$\log_3 \frac{2x}{x+5} = 0$$
$$\frac{2x}{x+5} = 3^0$$
$$\frac{2x}{x+5} = 1$$
$$2x = x + 5$$
$$x = 5$$

Verificación: $\log_3 2(5) - \log_3 (5 + 5) = \log_3 10 - \log_3 10 = 0$

Algunas veces, es conveniente resolver una ecuación logarítmica aplicando la propiedad de que las funciones logarítmicas son biunívocas. Esta propiedad (expuesta en la página 367) dice así:

Si $\log_b M = \log_b N$, entonces: $M = N$.

He aquí, por ejemplo, la solución de la ecuación del Ejemplo 6 con la aplicación de esta propiedad.

$$\log_3 2x - \log_3 (x+5) = 0$$
$$\log_3 2x = \log_3 (x+5)$$
$$2x = x + 5 \quad \textbf{(por ser una función biunívoca)}$$
$$x = 5$$

PRECAUCION: APRENDA A EVITAR ERRORES COMO ESTOS	
MAL	**BIEN**
$\log_b A + \log_b B = \log_b (A+B)$	$\log_b A + \log_b B = \log_b AB$
$\log_b (x^2 - 4) = \log_b x^2 - \log_b 4$	$\log_b (x^2 - 4)$ $= \log_b (x+2)(x-2)$ $= \log_b (x+2) + \log_b (x-2)$
$(\log_b x)^2 = 2 \log_b x$	$(\log_b x)^2 = (\log_b x)(\log_b x)$
$\log_b A - \log_b B = \dfrac{\log_b A}{\log_b B}$	$\log_b A - \log_b B = \log_b \dfrac{A}{B}$
Si $2 \log_b x = \log_b (3x+4)$, Entonces: $2x = 3x + 4$	Si $2 \log_b x = \log_b (3x+4)$, Entonces: $\log_b x^2 = \log_b (3x+4)$
$\log_b \dfrac{x}{2} = \dfrac{\log_b x}{2}$	$\log_b \dfrac{x}{2} = \log_b x - \log_b 2$
$\log_b (x^2 + 2) = 2 \log_b (x+2)$	$\log_b (x^2 + 2)$ no se puede simplificar más.

EJERCICIOS 3

Aplique las leyes de los logaritmos (hasta donde sea posible) para convertir los logaritmos en expresiones que incluyan sumas, diferencias, y múltiplos de los propios logaritmos.

1. $\log_b \dfrac{3x}{x+1}$ **2.** $\log_b \dfrac{x^2}{x-1}$ **3.** $\log_b \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ **4.** $\log_b \dfrac{1}{x^2}$ **5.** $\log_b \dfrac{1}{x^2}$ **6.** $\log_b \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

Convierta cada expresión en el logaritmo de una sola expresión en x.

7. $\log_b (x+1) - \log_b (x+2)$

8. $\log_b x + 2 \log_b (x-1)$

9. $\dfrac{1}{2}\log_b\left(x^2-1\right) - \dfrac{1}{2}\log_b\left(x^2+1\right)$

10. $\log_b (x+2) - \log_b (x^2 - 4)$

11. $3 \log_b x - \log_b 2 - \log_b (x+5)$

12. $\dfrac{1}{3}\log_b(x-1) + \log_b 3 - \dfrac{1}{3}\log_b(x+1)$

Use las leyes adecuadas de los logaritmos para explicar por qué es correcta cada expresión.

13. $\log_b 27 + \log_b 3 = \log_b 243 - \log_b 3$

14. $\log_b 16 + \log_b 4 = \log_b 64$

15. $-2\log_b \dfrac{4}{9} = \log_b \dfrac{81}{16}$

16. $\dfrac{1}{2}\log_b 0.0001 = -\log_b 100$

Encuentre los logaritmos usando las leyes de los propios logaritmos y la siguiente información: $\log_b 2 = 0.3010$, $\log_b 3 = 0.4771$ y $\log_b 5 = 0.6990$. Suponga que todo los logaritmos tienen la misma base b.

17. (a) log 4 **(b)** log 8 **(c)** log 1/2 **18. (a)** $\log\sqrt{2}$ **(b)** log 9 **(c)** log 12

19. **(a)** log 48 **(b)** log 2/3 **(c)** log 125 **20.** **(a)** log 50 **(b)** log 10 **(c)** log 25/6

21. **(a)** $\log\sqrt[3]{5}$ **(b)** $\log\sqrt{20^3}$ **(c)** $\log\sqrt{900}$ **22.** **a)** log 0.2 **(b)** log 0.25 **(c)** log 2.4

Resuelva para x y verifique

23. $\log_{10} x + \log_{10} 5 = 2$ **24.** $\log_{10} x + \log_{10} 5 = 1$ **25.** $\log_{10} 5 - \log_{10} x = 2$

26. $\log_{10} (x + 21) + \log_{10} x = 2$ **27.** $\log_{12} (x - 5) + \log_{12} (x - 5) = 2$ **28.** $\log_3 x + \log_3 (2x + 51) = 4$

29. $\log_{l6} x + \log_{l6} (x - 4) = 5/4$ **30.** $\log_2 (x^2) - \log_2 (x - 2) = 3$ **31.** $\log_{10} (3 - x) - \log_{10} (12 - x) = -1$

32. $\log_{l0} (3x^2 - 5x - 2) - \log_{10} (x - 2) = 1$ **33.** $\log_{1/7} x + \log_{1/7} (5x - 28) = -2$

34. $\log_{1/3} 12x^2 - \log_{l/3} (20x - 9) = -1$ **35.** $\log_{10} (x^3 - 1) - \log_{10} (x^2 + x + 1) = -2$

36. $2 \log_{10} (x - 2) = 4$ **37.** $2 \log_{25} x - \log_{25} (25 - 4x) = 1/2$

38. $\log_3 (8x^3 + 1) - \log^3 (4x^2 - 2x + 1) = 2$

***39**. Demuestre la ley 2. (*Sugerencia*: guíese con la demostración de la ley l, usando $\frac{b^r}{b^s} = b^{r-s}$)

***40.** Demuestre la ley 3. (*Sugerencia*: use $(b^r)^k = b^{rk}$.)

***41.** Demuestre para x: $(x + 2) \log_b b^x = x$.

***42.** Resuelva para x: $\log_{N2} N = x$.

***43.** Resuelva para x: $\log_x (2x)^{3x} = 4x$.

***44.** **(a)** Explique por qué $\log_b b = 1$.

(b) Demuestre que $(\log_b a)(\log_a b) = 1$. (*Sugerencia*: aplique usted la ley 3 y el resultado $b^{\log bx} = x$.)

***45.** Utilice $B^{\log BN} = N$ para obtener: $\log_B N = \frac{\log_b N}{\log_b B}$ (*Sugerencia*: empiece tomando el logaritmo de ambos lados en la base b).